

ΜΑΥ611: Μιγαδικές Συναρτήσεις I (2024-25) - 2η Ενδιάμεση Εξέταση

Ημερομηνία: 30/5/2025

Διάρκεια: 3 ώρες

1. Προσδιορίστε τον μεγαλύτερο ανοικτό δίσκο στον οποίο συγκλίνουν απόλυτα οι ακόλουθες δυναμοσειρές, και υπολογίστε το άθροισμά τους.

$$\alpha) \sum_{n=0}^{\infty} (1+3i)^n (z-i)^n \qquad \beta) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{nz^{n-1}}{(n-2)!} \qquad (1+1 \text{ μον.})$$

2. α) Βρείτε την ακτίνα σύγκλισης R_c της δυναμοσειράς $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$, και δείξτε ότι το άθροισμα ισούται με $\text{Log}(1+z)$, για κάθε $z \in D(0, R_c)$.

β) Έστω $z_0 \in \mathbb{C}$. Δείξτε ότι η συνάρτηση $f(z) = \frac{1}{z_0 - z}$ είναι αναλυτική στο $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$. (1+1 μον.)

3. α) Έστω $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ και $f : D(z, r) \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνάρτηση $\tilde{f} : D(z, r) \rightarrow \mathbb{C}$ τέτοια ώστε

$$\int_{[z,w]} f(u) du = \tilde{f}(w) - \tilde{f}(z),$$

για κάθε $w \in D(z, r)$. Δείξτε ότι $\tilde{f}'(z) = f(z)$.

β) Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ αστρόμορφος τόπος με κέντρο $z_0 \in D$, και $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ συνεχής. Υποθέτουμε ότι

$$\int_{\partial \Delta} f(u) du = 0,$$

για κάθε συμπαγές τρίγωνο $\Delta \subseteq D$ με μία κορυφή στο z_0 . Δείξτε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο D . (1+1 μον.)

4. Σχεδιάστε πρόχειρα την καμπύλη γ και υπολογίστε το ολοκλήρωμα σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις.

α) $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 9}$, όπου $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$ με $\gamma(t) = 1 + i + 3e^{-it}$.

β) $\int_{\gamma} \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)(z-i)} + \frac{z^4 + e^z}{(z+\pi i)^3} dz$, όπου γ η θετικά προσανατολισμένη κλειστή πολυγωνική γραμμή που ενώνει τα σημεία $1+2i, -1+2i, -1-4i, 1-4i$. (1+1 μον.)

5. α) Έστω $D \subseteq \mathbb{C}$ ανοικτό, και $a \in D$, $r > 0$ τέτοια ώστε $\overline{D(a, r)} \subseteq D$. Δείξτε ότι αν η $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ είναι ολόμορφη με $|f(z)| \leq 1$ για κάθε $z \in \partial D(a, r)$, τότε για κάθε $n = 0, 1, 2, \dots$ έχουμε

$$|f^{(n)}(a)| \leq \frac{n!}{r^n}.$$

Εξηγήστε έπειτα γιατί αν μια συνάρτηση $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ είναι αθέριμη και φραγμένη, τότε είναι αναγκαστικά σταθερή.

β) Έστω $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ αθέριμη, μη-σταθερή συνάρτηση. Δείξτε ότι $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$. (1+1 μον.)

6. Προσδιορίστε και ταξινομήστε τις μεμονωμένες ανωμαλίες των συναρτήσεων $\frac{z}{\sin z}$ και $e^{\frac{z}{\sin z}}$. (1+1 μον.)

Αιτιολογείτε πλήρως τις απαντήσεις σας.

Καλή επιτυχία!